Л А Б О Р А Т О Р Н А Я Р А Б О Т А № 10

ФЛУКТУАЦИИ ЧИСЛА ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫХ ЛИВНЯХ

Электронно-фотонный ливень возникает в результате многих взаимодействий падающего на вещество электрона или фотона и образующихся при этом новых частиц. Ввиду вероятностного характера индивидуальных взаимодействий электронов и фотонов с атомами вещества и того, что последовательные взаимодействия независимы, электронно-фотонный ливень – стохастический процесс. Изучение таких процессов опирается на методы теории вероятности. Поэтому описание ливня средними характеристиками, такими, например, как среднее число частиц на данной глубине, должно быть дополнено исследованием вероятностных распределений этих величин или по крайней мере флуктуаций их относительно средних значений.

Определим функцию $\Psi_\gamma(E_0, E, t, N_e, \Gamma_e)$, описывающую развитие каскада на глубине t, как вероятность того, что первичная частица с энергией E_0 образует на глубине t вещества $N_{e,\gamma}$ электронов и $\Gamma_{e,\gamma}$ фотонов с энергией больше E (индексы e, γ отмечают, какова первичная частица – электрон или фотон).

Приведем вывод уравнений для функции $\Psi_\gamma(E_0, E, t, N_e, \Gamma_e)$ – вероятности образования на глубине t N_e электронов и Γ_e фотонов с энергией больше E, если на границу вещества попадает электрон с энергией E_0. Рассмотрим, что может произойти с первичным электроном в слое Δt вещества, прилегающем к его границе, и найдем связь возможных событий у границы вещества с вероятностью найти после развития ливня в следующем слое вещества с толщиной t числа электронов N_e и фотонов Γ_e с энергией больше E (рис. 1). Вероятность

$$\Psi_e(E_0, E, t+\Delta t; N_e, \Gamma_e) \quad (1)$$

есть сумма вероятностей всех возможных событий, которые могут произойти с первичным электроном в слое вещества Δt и затем повлиять на судьбу ливня, формирующегося при последующем прохождении слоя вещества толщиной t. Рассмотрим развитие ливня в приближении Б, т. е. не будем учитывать кулоновское рассеяние электронов, а комптон-эффект учтем приближенно, принимая постоянным сечение поглощения фотонов, и, кроме того, ионизационные потери отнесем к непрерывным процессам.

1. Первая возможность состоит в том, что с вероятностью

$$1 - \Delta t \int_0^{E_0} W_e(E_0, E')dE' \qquad (2)$$

электрон пройдет сквозь слой Δt, не испытав катастрофических взаимодействий, т. е. только теряя непрерывно энергию $\Delta t \beta$ на ионизацию. Здесь $W_e(E_0, E')dE'$ - вероятность того, что электрон с энергией E_0 излучит фотон с энергией в интервале E', $E'+dE'$ при прохождении единицы толщины вещества. От такого электрона после последующего развития ливня в слое вещества толщиной t на глубине $t+\Delta t$ образуется N_e электронов и Γ_e фотонов (рис. 2) с вероятностью

$$\Psi_e(E_0 - \beta\Delta t; E; t; N_e, \Gamma_e) \qquad (3)$$

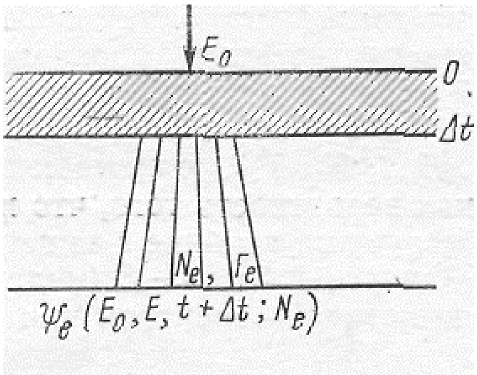

Рис. 1

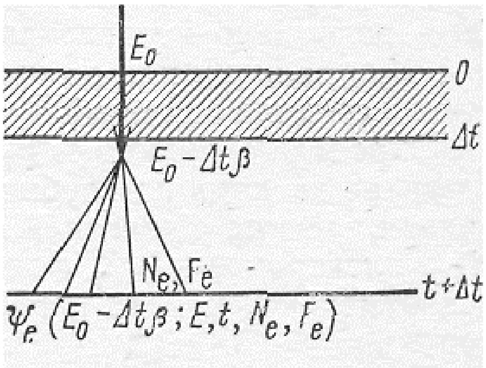

Рис. 2

Поскольку события, описываемые формулами (2) и (3) независимы, произведение их даст вклад в исследуемую вероятность (1) первого из возможных событий, происходящих в слое Δt с первичным электроном.

2. Вторая возможность для электрона при прохождении слоя Δt – испытать радиационное торможение с испусканием фотона с энергией в интервале E', $E'+dE'$. Вероятность этого события равна

$$\Delta t \cdot W_e(E_0, E')dE' \qquad (4)$$

Будем считать $\Delta t<<1$ и интересоваться процессами, пропорциональными только первой степени Δt. Тогда аналогичные соображения приведут к следующему. Образовавшиеся с вероятностью (4) в слое Δt электрон с энергией E_0 - E' и фотон с энергией E' дадут независимо друг от друга начало двум ливням, каждый из которых по прошествии глубины t, дает ливень с числом частиц соответственно N'_e, Γ'_e и N'_γ, Γ'_γ (рис. 3).

С вероятностями $\Psi_e(E_0 - E', E, t; N'_e, \Gamma'_e)$ и $\Psi_\gamma(E', E, t; N'_\gamma, \Gamma'_\gamma)$ ливни развиваются независимо друг от друга, поэтому вероятность обнаружения на глубине $t+\Delta t$ ливня с числом электронов N_e, и числом фотонов Γ_e с энергией больше E, равна произведению

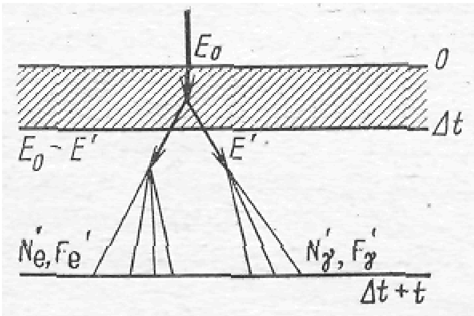

Рис. 3

$$\Delta t \cdot \Psi_e(E_0 - E', E, t, N'_e, \Gamma'_e) \cdot \Psi_\gamma(E', E, t; N'_\gamma, \Gamma'_\gamma) \times$$
$$\times W_e(E_0, E')dE' \qquad (5)$$

Энергия излученного в слое Δt фотона E' может быть любой величиной от 0 до E_0. Чтобы учесть это, нужно (5) проинтегрировать в указанном интервале энергий. Поскольку нас интересует не любая сумма $N'_e + N'_\gamma$ и $\Gamma'_e + \Gamma'_\gamma$, а вклад рассматриваемого события в вероятность (1) обнаружения N_e, Γ_e, частиц с энергией больше E на глубине $t+\Delta t$, то необходимо произвести суммирование по всем $N'_{e,\gamma}$ и $\Gamma'_{e,\gamma}$ но так чтобы в конечном результате учитывались лишь суммы $N'_e + N'_\gamma = N_e$ и $\Gamma'_e + \Gamma'_\gamma = \Gamma_e$. Математически можно произвести такой отбор введением символа Кронекера. С учетом вышесказанного можно записать первое уравнение в приближении Б для функций $\Psi_{e,\gamma}$ в виде:

$$\Psi_e(E_0, E, t + \Delta t, N_e, \Gamma_e) =$$
$$= \Psi_e(E_0 - \Delta t\beta, E, t, N_e, \Gamma_e)(1 - \Delta t\int_0^E W_e(E_0, E')dE') +$$
$$+ \Delta t \sum_{\Gamma'_e}\sum_{\Gamma'_\gamma}\delta_{\Gamma'_e+\Gamma'_\gamma,\Gamma_e}\sum_{N'_e}\sum_{N'_\gamma}\delta_{N'_e+N'_\gamma,N_e} \times$$
$$\times \int_0^{E_0} W_e(E_0, E')\Psi_e(E_0 - E', E, t; N'_e, \Gamma'_e) \times$$
$$\Psi'_\gamma(E', E, t; N'_e, \Gamma'_\gamma). \qquad (6)$$

(здесь и дальше символ $\sum\limits_{N_{e,\gamma}}$ или $\sum\limits_{\Gamma_{e,\gamma}}$ означает суммирование по величинам указанным внизу от 0 до ∞).

Используя аналогичные рассуждения, можно получить уравнение для функции $\Psi_\gamma(E_0, E, t+\Delta t; N_\gamma, \Gamma_\gamma)$ вероятности образования первичным фотоном с энергией *E₀* N_γ электронов и Γ_γ фотонов с энергией больше *E*. Использовав, далее, обычную процедуру разложения функции по малой добавке в ее аргументе, пропорциональной Δt, разделив все члены уравнения (6) и соответствующего уравнения для Ψ_γ на Δt и устремив Δt к нулю, получим систему интегродифференциальных уравнений для функций $\Psi_{e,\gamma}$

$$\frac{\partial \Psi_e(E_0, E, t, N_e, \Gamma_e)}{\partial t} = -\Psi_e(E_0, E, t, N_e, \Gamma_e) \times$$
$$\times \int_0^{E_0} W_e(E_0, E')dE' - \beta \frac{\partial \Psi_e(E_0, E, t, N_e, \Gamma_e)}{\partial E_0} +$$
$$+ \sum_{N'_e} \sum_{N'_\gamma} \sum_{\Gamma'_e} \sum_{\Gamma'_\gamma} \delta_{N'_e+N'_\gamma, N_e} \delta_{\Gamma'_e+\Gamma'_\gamma, \Gamma_e} \times$$
$$\times \int_0^{E_0} W_e(E_0, E')\Psi_e(E_0 - E', E, t; N'_e, \Gamma'_e) \times$$
$$\times \Psi_\gamma(E', E, t; N_\gamma, \Gamma_\gamma)dE';$$
$$\frac{\partial \Psi_\gamma(E_0, E, t; N_\gamma, \Gamma_\gamma)}{\partial t} = -\sigma_0 \Psi_\gamma(E_0, E, t; N_\gamma, \Gamma_\gamma) +$$
$$+ \sum_{N'_e} \sum_{N''_e} \sum_{\Gamma'_e} \sum_{\Gamma''_e} \delta_{N'_e+N''_e, N_\gamma} \times$$
$$\times \delta_{\Gamma'_e+\Gamma''_e, \Gamma_\gamma} \int_0^{E_0} W_p(E_0, E')\Psi_e(E_0 - E', E, t; N'_e, \Gamma''_e) \times$$
$$\times \Psi_e(E', E, t; N'_e, \Gamma''_e) \qquad (7)$$

здесь $W_p(E_0, E')dE'$ - вероятность того, что фотон с энергией E_0 образует пару электронов с энергией E' и $E_0 - E'$, $\sigma_0 = \int_0^{E_0} W_p(E_0, E')dE'$ - коэффициент поглощения фотонов. Условие нормировки функций $\Psi_{e,\gamma}$ имеет вид:

$$\sum_{N_{e,\gamma}} \sum_{\Gamma_{e,\gamma}} \Psi_{e,\gamma}(E_0, E, t; N_{e,\gamma}; \Gamma_{e,\gamma}) = 1 \qquad (8)$$

Вероятность того, что в ливне присутствует на глубине *t* данное число электронов $N_{e,\gamma}$ с энергией выше *E* при любом числе фотонов, получим, просуммировав $\Psi_{e,\gamma}(E_0, E, t; N_{e,\gamma}; \Gamma_{e,\gamma})$ по всем $\Gamma_{e,\gamma}$

$$\Psi_{e,\gamma}(E_0, E, t; N_{e,\gamma}) = \sum_{\Gamma_{e,\gamma}} \Psi_{e,\gamma}(E_0, E, t; N_{e,\gamma}; \Gamma_{e,\gamma}) \qquad (9a)$$

Аналогично вероятность данного числа фотонов

$$\Psi_{e,\gamma}(E_0, E, t; \Gamma_{e,\gamma}) = \sum_{\Gamma_{e,\gamma}} \Psi_{e,\gamma}(E_0, E, t; N_{e,\gamma}; \Gamma_{e,\gamma}) \tag{9б}$$

Моменты $\Psi_{e,\gamma}$ функции определяются выражениями

$$\overline{N}^n_{e,\gamma}(E_0, E, t) = \sum_{N_{e,\gamma}} \sum_{\Gamma_{e,\gamma}} N^n_{e,\gamma} \Psi_{e,\gamma}(E_0, E, t; N_{e,\gamma}; \Gamma_{e,\gamma})$$

$$\overline{\Gamma}^n_{e,\gamma}(E_0, E, t) = \sum_{N_{e,\gamma}} \sum_{\Gamma_{e,\gamma}} \Gamma^n_{e,\gamma} \Psi_{e,\gamma}(E_0, E, t; N_{e,\gamma}; \Gamma_{e,\gamma}) \tag{10}$$

Коэффициент корреляции электронов с фотонами

$$\overline{N}^n_{e,\gamma} \overline{\Gamma}^n_{e,\gamma} = \sum_{N_{e,\gamma}} \sum_{\Gamma_{e,\gamma}} N^n_{e,\gamma} \Gamma^n_{e,\gamma} \Psi_{e,\gamma}(E_0, E, t; N_{e,\gamma}; \Gamma_{e,\gamma}) \tag{11}$$

Уравнения для моментов и коэффициентов корреляции получаются почленным умножением уравнений для $\Psi_{e,\gamma}$ на $N^n_{e,\gamma}$ или $\Gamma^n_{e,\gamma}$ или $\Gamma^n_{e,\gamma} N^n_{e,\gamma}$ и суммированием согласно правилам (10), (11). При этом в членах, содержащих несколько сумм, нужно провести первым суммирование по той величине, для моментов которой выводится уравнение, воспользовавшись свойствами символа Кронекера. Все последующие суммирования проводятся в соответствии с правилами (8)-(11).

Очевидно, моменты первого порядка представляют собой средние распределения по энергиям чисел электронов $N^n_{e,\gamma}(E_0, E, t)$ или фотонов $\Gamma^n_{e,\gamma}(E_0, E, t)$ на данной глубине. Уравнения, например для среднего числа электронов $N^n_{e,\gamma}(E_0, E, t)$ в приближении Б имеют вид

$$\frac{\partial \overline{N}_e(E_0, E, t)}{\partial t} = -\overline{N}'_e(E_0, E, t) \int_0^{E_0} W_e(E_0, E') dE' +$$

$$\int_0^{E_0} \overline{N}_e(E_0 - E', E, t) W_e(E_0, E') dE' + \int_0^{E_0} \overline{N}_\gamma(E', E, t) \times$$

$$W_e(E_0, E') dE' - \beta \frac{\partial \overline{N}_e(E_0, E, t)}{\partial E_0};$$

$$\frac{\partial \overline{N}_\gamma(E_0, E, t)}{\partial t} = -\sigma_0 \overline{N}_\gamma(E_0, E, t) + \int_0^{E_0} [\overline{N}_e(E_0 - E, E, t) +$$

$$+\overline{N}_e(E',E,t)]W_p(E_0,E')dE'. \qquad (12)$$

Система уравнений (12) по форме отличается от классической системы уравнений каскадной теории (см. [1, 2]), поскольку они связывают разные распределения с разными переменными. Но решение уравнений (12) совпадает с соответствующими распределениями, получающимися из решений уравнений для средних чисел частиц, поскольку и те и другие получены при одинаковых предположениях.

Решение уравнений для вторых моментов функции $\Psi_{e,\gamma}$ позволяет оценить среднеквадратичное отклонение числа электронов $\Delta N_{e,\gamma}(E_0,E,t)$ и фотонов $\Delta\Gamma_{e,\gamma}(E_0,E,t)$ вследствие флуктуаций в развитии ливней. Так, например,

$$\Delta N_{e,\gamma}(E_0,E,t)=[\overline{N}^2_{e,\gamma}-(\overline{N}_{e,\gamma})^2]^{1/2}=$$
$$=\overline{N}_{e,\gamma}(E_0,E,t)\sqrt{\delta_{e,\gamma}-1}, \qquad (13)$$

выражения для $\delta_{e,\gamma}$, полученные в приближении А,

$$\delta_e=\frac{2\left\{\dfrac{\overline{N}_\gamma(E_0,E,t)}{\overline{N}_e(E_0,E,t)}\gamma_1(s)\left[2\lambda_1(s)+\sigma_0\right]+C(2s)\gamma_2(s)\right\}}{\left[2\lambda_1(s)-\lambda_1(2s)\right]\left[2\lambda_1(s)-\lambda_2(2s)\right]};$$

$$\delta_\gamma=\frac{2\left\{\dfrac{\overline{N}_\gamma(E_0,E,t)}{\overline{N}_e(E_0,E,t)}\gamma_1(s)B(2s)+\left[2\lambda_1(s)+A(2s)\right]\gamma_2(s)\left[\dfrac{\overline{N}_\gamma(E_0,E,t)}{\overline{N}_e(E_0,E,t)}\right]^2\right\}}{\left[2\lambda_1(s)-\lambda_1(2s)\right]\left[2\lambda_1(s)-\lambda_2(2s)\right]}$$

$$\ln(E_0/E)+\lambda_1'(s)t=0 \qquad (14)$$

Упражнение 1. Вывести уравнение для $\Psi_e(E_0,E,t,N_e,\Gamma_e)$, рассмотрев случай падения на вещество фотона с энергией E_0 с учетом комптон-эффекта. Использовать сечение комптон-эффекта в виде $W_{comp}(E_0E')dE'=qdE'/E_0E'$ и сечение образования пар в виде $W_p(E_0E')dE'=\sigma_0dE'/E_0E'$.

Упражнение 2. Вывести уравнения для $N^2_{e,\gamma}(E_0,E,t)$.

Упражнение 3. Вывести уравнения для коэффициентов корреляции $\overline{N_e\Gamma_e}$ и $\overline{N_\gamma\Gamma_\gamma}$.

Упражнение 4. Найти решение уравнений (12) для $\overline{N}_{e,\gamma}(E_0,E,t)$, применив преобразования Меллина по переменной E_0 в форме

$$\overline{N}_{e,\gamma}(x,t,E)=\int_0^\infty E_0^{-x-2}\overline{N}_{e,\gamma}(E_0,E,t)dE_0$$

с формулой обращения

$$\overline{N}_{e,\gamma}(E_0,E,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_e E_0^{x+1}\overline{N}_{e,\gamma}(x,t,E)dx$$

Упражнение 5. Определить абсолютную величину среднеквадратичного отклонения числа электронов $\Delta N_e(E_0,E,t)$ для ливня с заданным значением E_0/E на глубинах t, соответствующих разным s. Найти соответствующие значения t ($\gamma_1(s)$ и $\gamma_2(s)$ берутся из [4]).

Упражнение 6. Определить абсолютную величину среднеквадратичного отклонения $\Delta\overline{N}_\gamma(E_0,E,t)$ для ливня с заданным E_0/E на глубинах, соответствующих разным s. Воспользоваться значениями $\gamma_{1,2}$ из [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленький С.З. Лавинные процессы в космических лучах. М., ГТТИ, 1948.
2. Иваненко И.П. Электромагнитные каскадные процессы. М., Изд-во Моск. ун-та, 1972.
3. Герасимова Н.М. ЖЭТФ, 43, 500, 1962; 44, 240, 1962. Труды ФИАН, 26, 192, 1964.
4. Бахтадзе А.К., Герасимова Н.М., «Ядерная физика», 19, 878, 1974.