Л А Б О Р А Т О Р Н А Я Р А Б О Т А № 9

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫХ ЛИВНЕЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ А

Одномерная каскадная теория в приближении А

Цель упражнений 1 состоит в ознакомлении с основными процессами взаимодействия электронов* и фотонов больших энергий с веществом, которые приводят к возникновению электронно-фотонных каскадных ливней, и в изучении методов решения интегро-дифференциальных уравнений электромагнитной каскадной теории ливней путем использования интегральных преобразований Лапласа и Меллина.

При прохождении через вещество электроны и фотоны больших энергий участвуют в процессах тормозного излучения (электроны), образования пар (фотоны), испытывают ионизационные потери (электроны) и комптон-эффект (фотоны). Кроме того, электроны испытывают кулоновское рассеяние на ядрах атомов среды**. В области больших энергий основную роль играют процессы тормозного излучения электронов и образования электронно-позитронных пар фотонами. Тормозясь в поле ядра, электрон создает фотон с энергией, сравнимой по порядку величины с энергией первичного электрона. Фотон такой энергии может образовать электронно-позитронную пару или испытать комптоновское рассеяние. Образовавшиеся электроны в процессе тормозного излучения снова испускают фотоны и т. д. Вследствие этого в веществе вместо одного первичного электрона или первичного фотона с энергией E_0 образуется большое количество фотонов и заряженных электронов обоих знаков, составляющих так называемый электронно-фотонный каскадный ливень. При прохождении такого ливня через вещество одновременно с рождением частиц происходит дробление их энергии, которое будет продолжаться до тех пор, пока энергия возникающих вторичных

---

*Здесь и далее под электронами больших энергий будем понимать и электроны и позитроны.

** В данном параграфе нас интересует распределение частиц только по энергиям E и по глубине t слоя вещества. Процесс кулоновского рассеяния, приводящий к появлению распределения частиц по углам θ с осью ливня, в дальнейшем рассматривать не будем.

частиц не приблизится к некоторой критической энергии для данного вещества β. После этого заряженные частицы будут терять основную часть своей энергии на ионизацию среды, общее число частиц в ливне будет уменьшаться и ливень постепенно истощится.

Поведение ливневых электронов и фотонов в веществе описывается системой двух интегро-дифференциальных уравнений, которые являются основными уравнениями электромагнитной каскадной теории. Приведем вывод этих уравнений для области очень больших энергий ливневых частиц $E>>\beta$, когда ионизационными потерями частиц можно пренебречь. Пусть $P(E_0, E, t)$ и $\Gamma(E_0, E, t)$ - функция распределения соответственно электронов и фотонов с энергией E в интервале E, $E+dE$ на глубине t слоя вещества в ливне с полной энергией E_0. При прохождении частицами ливня пути dt в веществе их число в энергетическом интервале E, $E+dE$ будет меняться из-за следующих эффектов:

а. Фотоны с энергией $E' \geq E$ в результате образования электронно-позитронных пар дадут

$$2dEdt\int_E^\infty \Gamma(E_0, E', t)W_p(E', E)dE' \tag{1}$$

электронов в интервале энергий E, $E+dE$.

б. Электроны с энергией $E' \geq E$ вследствие тормозного излучения образуют

$$dEdt\int_E^\infty P(E_0, E', t)W_e(E', E'-E)dE' \tag{2}$$

электронов.

в. В результате тормозного излучения теряют энергию и покидают данный энергетический интервал

$$-dEdtP(E_0, E, t)\int_0^E W_e(E, E')dE' \tag{3}$$

электронов. Заметим, что интегралы (2) и (3) расходятся, однако их разность остается конечной величиной.

г. Электроны с энергией $E' \geq E$ вследствие тормозного излучения образуют

$$dEdt\int_E^\infty P(E_0, E', t)W_e(E', E)dE' \tag{4}$$

фотонов в интервале энергий E, $E+dE$.

д. В результате образования пар уходят из данного энергетического интервала

$$-dEdt\Gamma(E_0, E', t)\int_0^E W_p(E, E')dE' \tag{5}$$

фотонов.

В рассмотренных выше интегралах функция $W_e(E,E')dE'$ описывает вероятность тормозного излучения электроном с энергией E фотона с энергией E' на единице пути в веществе, а функция $W_p(E',E)dE$ - вероятность образования фотоном с энергией E' в поле ядра электронно-позитронной пары с энергией позитрона E и электрона E' - E на единице пути в веществе. Упрощенные выражения этих вероятностей в приближении полного экранирования на одной радиационной единице длины пути в веществе имеют вид

$$W_e(E,E') = \frac{1}{E'}, \qquad W_p(E',E) = \frac{\sigma_0}{E'} \tag{6}$$

где σ_0 – полный коэффициент поглощения фотонов на одной радиационной единице длины t_0.

Учитывая эффекты а – д, запишем основные уравнения электромагнитной каскадной теории для функций распределения $P(E_0, E, t)$ и $\Gamma(E_0, E, t)$ в виде

$$\frac{\partial P(E_0,E',t)}{\partial t} = 2\int_E^\infty \Gamma(E_0,E',t)W_p(E',E)dE' + \int_E^\infty P(E_0,E',t)W_e(E',E'-E)dE' -$$
$$-\int_0^E P(E_0,E,t)W_e(E,E')dE',$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma(E_0,E,t)}{\partial t} &= \int_0^E P(E_0,E',t)W_e(E',E)dE' - \\ &-\int_0^E \Gamma(E_0,E,t)W_p(E,E')dE'\end{aligned} \tag{7}$$

Будем искать аналитические выражения функций P и Γ методом интегральных преобразований Лапласа по переменной t и Меллина по переменной E. Преобразование Лапласа определяется как интеграл

$$P(E_0,E,\lambda) = \int_0^\infty P(E_0,E,t)e^{-\lambda t}dt \tag{8}$$

где λ - комплексный параметр. В общем случае функция $P(\lambda)$ определена в полуплоскости справа от прямой, параллельной мнимой оси.

Важным свойством преобразования Лапласа является то, что при не очень ограничивающих условиях соответствие между $P(t)$ и $P(\lambda)$, установленное формулой (8), однозначно: существует только одна функция $P(t)$, для которой $P(\lambda)$ является ее интегралом Лапласа. Если известна функция $P(\lambda)$, называемая трансформантой Лапласа, то функцию $P(t)$ можно определить при помощи формулы обратного преобразования Лапласа

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C P(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda \tag{9}$$

где контур интегрирования C есть прямая, параллельная мнимой оси и расположенная в полуплоскости сходимости функции $P(\lambda)$**.**

Аналогично преобразуется функция $\Gamma(E_0, E, t)$. В результате применения преобразования Лапласа по переменной t к уравнениям (7) получим систему двух уравнений для трансформант Лапласа *P, Г*

$$\begin{aligned}
&-P(E_0,E,t=0)+\lambda P(E_0,E,\lambda)= \\
&=2\int_E^\infty \Gamma(E_0,E',\lambda)W_p(E',E)dE' + \int_E^\infty P(E_0,E',\lambda)W_e(E',E'-E)dE' - \\
&-\int_0^E P(E_0,E,\lambda)W_e(E,E')dE', \\
&-\Gamma(E_0,E,t=0)+\lambda\Gamma(E_0,E,\lambda)=\int_0^E P(E_0,E',\lambda)W_e(E',E)dE' - \\
&-\int_0^E \Gamma(E_0,E,\lambda)W_p(E,E')dE'
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставим явные выражения сечений основных процессов (6) и (10) и применим к системе (10) преобразование Меллина по переменной *E*. Преобразование Меллина определяется как интеграл

$$P(E_0,s,\lambda)=\int_0^\infty P(E_0,E,\lambda)E^s dE\,, \tag{11}$$

где s – комплексный параметр. Если этот интеграл расходится на нижнем пределе при $s = s_a$, то он расходится и при всех значениях s, для которых $\mathrm{Re}(s)<\mathrm{Re}(s_a)$. Если интеграл Меллина сходится, то область его сходимости представляет собой полосу, ограниченную двумя прямыми, параллельными мнимой оси.

Преобразование Меллина, как и преобразование Лапласа, однозначно и может быть обращено по формуле

$$P(E)=\frac{1}{2\pi i}\int_C P(s)E^{-(s+1)}ds\,, \tag{12}$$

где контур интегрирования C представляет собой прямую, параллельную мнимой оси и расположенную внутри полосы сходимости.

Применяя преобразование Меллина по переменной E, к системе уравнений (10), последовательно получаем:

$$1)\ 2\int_0^\infty E^s dE\int_E^\infty \Gamma(E_0,E',\lambda)W_p(E',E)dE'=$$
$$=2\int_0^\infty E^s dE\int_E^\infty \Gamma(E_0,E',\lambda)\frac{\sigma_0}{E'}dE' = 2\sigma_0\int_0^\infty \Gamma(E_0,E',\lambda)\frac{dE'}{E'}\int_0^{E'} E^s dE =$$
$$=\frac{2\sigma_0}{s+1}\int_0^\infty \Gamma(E_0,E',\lambda)E'^s dE' = B(s)\Gamma(E_0,s,\lambda);$$

$$2)\ \int_0^\infty E^s dE\left\{\int_E^\infty P(E_0,E',\lambda)W_e(E',E'-E)dE' - \int_0^E P(E_0,E,\lambda)W_e(E,E')dE'\right\}=$$
$$=\int_0^\infty E^s dE\left\{\int_0^\infty P(E_0,E',\lambda)\frac{dE'}{E'-E} - P(E_0,E,\lambda)\int_0^E\frac{dE'}{E'}\right\}=$$
$$=\int_0^\infty dE'P(E_0,E',\lambda)\int_0^{E'}\frac{E^s dE}{E'-E} - \int_0^\infty E^s dEP(E_0,E,\lambda)\int_0^E\frac{dE'}{E'}=$$
$$=\int_0^\infty dE'P(E_0,E',\lambda)E'^s\int_0^1\frac{\mathrm{v}^s d\mathrm{v}}{1-\mathrm{v}} -$$
$$-\int_0^\infty E^s dEP(E_0,E,\lambda)\int_0^1\frac{d\mathrm{v}}{1-\mathrm{v}} = P(E_0,s,\lambda)\left\{\int_0^1\frac{\mathrm{v}^s d\mathrm{v}}{1-\mathrm{v}} - \int_0^1\frac{d\mathrm{v}}{1-\mathrm{v}}\right\}=$$
$$=-P(E_0,s,\lambda)\int_0^1\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}\left[1-(1-\mathrm{v})^s\right]=$$
$$=-A(s)P(E_0,s,\lambda);$$

$$3)\ \int_0^\infty E^s dE\int_E^\infty P(E_0,E',\lambda)W_e(E',E)dE'=$$

$$= \int_0^\infty dE' P(E_0, E', \lambda) \int_0^{E'} \frac{1}{E} E^s dE =$$

$$= \frac{1}{s} \int_0^\infty P(E_0, E', \lambda) E'^s dE' = C(s) P(E_0, s, \lambda)\,;$$

$$4) - \int_0^\infty E^s dE \int_0^E \Gamma(E_0, E, \lambda) W_p(E, E') dE' =$$

$$= -\int_0^\infty E^s dE \Gamma(E_0, E, \lambda) \frac{\sigma_0}{E} \int_0^E dE' = -\sigma_0 \Gamma(E_0, s, \lambda); \qquad (13)$$

где

$$A(s) = \int_0^1 \left[1 - (1 - \mathrm{v})^s\right] \frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}; \qquad B(s) = \frac{2\sigma_0}{s+1}; \quad C(s) = \frac{1}{s} \qquad (14)^*$$

В результате получим систему уравнений для функций $P(E_0, s, \lambda)$ и $\Gamma(E_0, s, \lambda)$ в виде

$$-\int_0^\infty E^s P(E_0, E, t = 0) dE + \lambda P(E_0, s, \lambda) =$$

$$= -A(s) P(E_0, s, \lambda) + B(s) \Gamma(E_0, s, \lambda)\,,$$

$$-\int_0^\infty E^s \Gamma(E_0, E, t = 0) dE + \lambda \Gamma(E_0, s, \lambda) =$$

$$= C(s) P(E_0, s, \lambda) - \delta_0 \Gamma(E_0, s, \lambda)\,. \qquad (15)$$

Для решения системы (15) необходимо выбрать граничные условия. Если на границу полубесконечного слоя вещества падает первичный электрон с энергией E_0, то граничные условия можно записать в форме

$$P(E_0, E, t = 0) = \delta(E_0 - E)\,, \qquad \Gamma(E_0, E, t = 0) = 0 \qquad (16)$$

где $\delta(E_0 - E)$ - дельта-функция Дирака. Поскольку

---

[*] Если для сечений $W_e(E', E)$ и $W_p(E', E)$ использовать более точные выражения, чем (6), то численные значения функций $A(s)$, $B(s)$ и $C(s)$ в интересующем нас интервале значений s несколько изменятся, однако для простоты можно ограничиться формулами (14) для проведения численных расчетов.

$$\int_0^\infty E^s P(E_0, E, T=0)dE = \int_0^\infty E^s \delta(E_0 - E)dE = E_0^s,$$

$$\int_0^\infty E^s \Gamma(E_0, E, t=0)dE = 0, \tag{17}$$

то, подставляя (16) в (15), получаем

$$-E_0^s + \lambda P(E_0, s, \lambda) = -A(s)P(E_0, s, \lambda) + \\ + B(s)\Gamma(E_0, s, \lambda),$$

$$\lambda\Gamma(E_0, s, \lambda) = C(s)P(E_0, s, \lambda) - \sigma_0\Gamma(E_0, s, \lambda). \tag{18}$$

Решая систему (18), получаем

$$P(E_0, s, \lambda) = \frac{E_0^s}{\Psi(\lambda, s)}, \qquad \Gamma(E_0, s, \lambda) = \frac{C(s)}{\lambda + \sigma_0}\frac{E_0^s}{\Psi(\lambda, s)} \tag{19}$$

где функция $\Psi(\lambda, s) = \lambda + A(s) - B(s)C(s)/(\lambda + \sigma_0)$ - известная функция каскадной теории. Ее можно представить в виде

$$\Psi(\lambda, s) = \frac{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]}{\lambda + \sigma_0} \tag{20}$$

где $\lambda_1(s)$ $\lambda_2(s)$ – корни уравнения $\Psi(\lambda,s)=0$. Используя (20), выполним обратное преобразование Лапласа

$$P(E_0, s, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} d\lambda e^{\lambda t} P(E_0, s, \lambda) = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{d\lambda(\lambda + \sigma_0)E_0^s}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} e^{\lambda t}. \tag{21}$$

Вычисляя интеграл (21) по полюсам $\lambda=\lambda_1(s)$ и $\lambda=\lambda_2(s)$, получаем

$$P(E_0, s, t) = E_0^s\left[H_1(s)e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s)e^{\lambda_{12}(s)t}\right], \tag{22}$$

где

$$H_1(s) = \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}, \; H_2(s) = \frac{\lambda_2(s) + \sigma_0}{\lambda_2(s) - \lambda_1(s)} \tag{23}$$

Аналогично

$$\Gamma(E_0, s, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} d\lambda e^{\lambda t}\Gamma(E_0, s, \lambda) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{d\lambda(\lambda + \sigma_0)C(s)E_0^s e^{\lambda t}}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} = \frac{C(s)E_0^s}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}e^{\lambda_1(s)t} + \\ \frac{C(s)E_0^s}{\lambda_2(s) - \lambda_1(s)}e^{\lambda_2(s)t}. \tag{24}$$

В области глубин t>1 членами с $\exp\{\lambda_2(s)t\}$ в формулах (22) и (24) можно пренебречь.

Применим теперь к функциям $P(E_0, s, t)$ и $\Gamma(E_0, s, t)$ обратное преобразование Меллина

$$P(E_0,E,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{v-i\infty}^{v+i\infty}\frac{ds}{E}H_1(s)e^{s\ln(E_0/E)+\lambda_1(s)t}\ .$$

$$\Gamma(E_0,E,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{v-i\infty}^{v+i\infty}\frac{ds}{E}\frac{C(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}e^{s\ln(E_0/E)+\lambda_1(s)t} \tag{25}$$

Для вычисления контурных интегралов (25) можно использовать так называемый метод перевала. Будем считать, что предэкспоненциальные множители в подынтегральных функциях (25) слабо зависят от *s*, что справедливо при достаточно больших значениях *t*. Можно утверждать, что при таком предположении получим первый член разложения решения по обратным степеням *t*. Рассмотрим функцию

$$\varphi_0(E_0,E,s,t)=s\ln(E_0/E)+\lambda_1(s)t\,. \tag{26}$$

При $s\to 0$ функция $\varphi\to\infty$ так как $\lambda_1(0)\to\infty$; при $s\to\infty$ функция φ_0 также стремится к ∞. Следовательно, функция φ_0 имеет минимум при некотором действительном положительном значении s. Это значение определяется из уравнения $\partial\varphi_0/\partial s=0$ или, в раскрытом виде, из условия

$$\ln(E_0/E)+\lambda_1'(s_m)t=0 \tag{27}$$

Перенесем контур интегрирования так, чтобы он проходил через точку s_m. Если функция φ_0 имеет минимум в точке s_m при изменении переменной вдоль действительной оси, то и в этой же точке s_m функция φ_0 будет иметь максимум при изменении переменной вдоль перпендикулярной оси. Это свойство следует из того, что аналитическая функция φ_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2}=0 \tag{28}$$

где

$$s=s_m+x+iz \tag{29}$$

Разложим функцию φ_0 в ряд по степеням $iz=s-s_m$ и ограничимся первыми двумя неисчезающими членами разложения:

$$\varphi_0=\varphi_0(s_m)-\frac{z^2}{2}\varphi_0''(s_m) \tag{30}$$

Следующие члены дают поправку порядка 1/t, и поэтому здесь ими можно пренебречь. Подставим разложение (30) в (25) и получим:

$$P(E_0,E,t)=\frac{H_1(s)E_0^s\exp\{\lambda_1(s)t\}}{E^{s+1}\{2\pi\lambda_1''(s)t\}^{1/2}}$$

$$\Gamma(E_0,E,t)=\frac{C(s)E_0^s\exp\{\lambda_1(s)t\}}{E^{s+1}[\lambda_1(s)-\lambda_2(s)]\{2\pi\lambda_1''(s)t\}^{1/2}} \tag{31}$$

В выражениях (31) переменные E_0, E, s и t связаны условием перевала

$$\ln(E_0 / E) + \lambda_1'(s)t = 0 \qquad (32)$$

Формулы (31) и (32) позволяют рассчитать функции распределения электронов и фотонов по энергии E на различных глубинах t слоя вещества в случае ливня, образованного первичным электроном с энергией E_0. Рассмотренным выше методом можно провести расчеты и для ливня, образованного первичным фотоном с энергией E_0. В последнем случае граничные условия следует взять в виде

$$P(E_0, E, t = 0) = 0$$
$$\Gamma(E_0, E, t = 0) = \delta(E_0 - E) \qquad (33)$$

В качестве упражнений следует провести расчеты зависимостей $\{P(E_0, E, t)\}^{P,\Gamma}$ или $\{\Gamma(E_0, E, t)\}^{P,\Gamma}$ от глубины t для заданного значения величины E_0/E, или же соответствующих интегральных по E функций $\{N_{P,\Gamma}(E_0, E, t)\}^{P,\Gamma}$ здесь верхний индекс P означает первичный электрон, верхний индекс Г – первичный фотон).

Упражнение 1. Рассчитать зависимости от глубины t числа частиц с энергией E, $E + dE$ в ливне от первичной частицы с энергией E_0 при заданной величине E_0/E:

$\{P(E_0, E, t)\}^P$, $\{\Gamma(E_0, E, t)\}^P$, $\{N_P(E_0, E, t)\}^P$, $\{N_\Gamma(E_0, E, t)\}^\Gamma$,
$\{P(E_0, E, t)\}^\Gamma$, $\{\Gamma(E_0, E, t)\}^\Gamma$, $\{N_P(E_0, E, t)\}^\Gamma$, $\{N_\Gamma(E_0, E, t)\}^\Gamma$

Упражнение 2. Решить систему (7), добавив в правые части уравнений функции источника вида:

а) $s_p(E,t) = \delta(E_0 - E)$, $s_\Gamma(E,t) = \delta(E_0 - E)$

б) $s_p(E,t) = \delta(E_0 - E)e^{-\mu t}$, $s_\Gamma(E,t) = \delta(E_0 - E)e^{-\mu t}$

в) $s_p(E,t) = f_p(E,t)$, $s_\Gamma(E,t) = f_\Gamma(E,t)$

Упражнение 3. Решить систему (7) для граничных условий в форме:

$P(E_0, E, t = 0) = 1/E^{s_1}$ при $E>E_1$ и 0 при $E<E_1$

$\Gamma(E_0, E, t = 0) = 1/E^{s_1}$ при $E>E_1$ и 0 при $E<E_1$

Упражнение 4. Решить систему (7) с граничными условиями упр. 3 а) с добавлением функций источника упр. 2. б). Определить «равновесный» спектр, исследовать его поведение при различных соотношениях между μ и s_1.

Угловое распределение частиц в электронно-фотонном ливне

При движении в веществе лавинные частицы отклоняются от направления движения первичной частицы за счет каскадных процессов радиационного торможения и образования пар. Углы отклонения при этих процессах по порядку величины равны mc^2/E, где E – энергия первичной частицы. Заряженные частицы отклоняются из-за резерфордовского рассеяния на ядрах атомов среды. Это отклонение гораздо больше отклонения из-за каскадных процессов, которыми можно пренебречь всюду, за исключением самого начала развития лавины.

Запишем в приближении А основные уравнения каскадной теории, считая углы отклонения частиц малыми и рассматривая рассеяние как многократное [1, 2]. В приближении малых углов функции P, $\Gamma(E_0,E,t,\theta_x,\theta_y)$ или P, $\Gamma(E_0,E,t,\theta,\varphi)$ есть функции E_0, E, t, θ, где

$$\theta=\sqrt{\theta_x^{\,2}+\theta_y^2}$$

$$\frac{\partial P(E_0,E,t,\theta)}{\partial t}=L_1[P(E_0,E,t,\theta),\Gamma(E_0,E,t,\theta)]+$$

$$+\frac{E_k^2}{4E^2}\Delta_\theta P(E_0,E,t,\theta)\,,$$

$$\frac{\partial\Gamma(E_0,E,t,\theta)}{\partial t}=L_2[P(E_0,E,t,\theta),\Gamma(E_0,E,t,\theta)]\,, \qquad (1)$$

выражение для оператора Лапласа $\Delta_\theta=\dfrac{1}{\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta})$.

Здесь $P(E_0,E,t,\theta)$, $\Gamma(E_0,E,t,\theta)$ искомые функции распределения электронов и фотонов по энергии E, глубине t (измеряемой в лавинных единицах) и углу отклонения от оси ливня θ (двумерный угол). Постоянная $E_к$ = 21 Мэв, L_1 и L_2 - интегральные операторы, учитывающие процессы радиационного торможения и образования пар:

$$L_1\left[P,\Gamma\right]=2\int_E^{E_0}\Gamma(E',t)W_p(E',E)dE'+\int_E^{E_0}P(E',t)\times$$

$$\times W_e(E',E'-E)dE' - \int_E^{E_0} P(t,E)W_e(E,E')dE',$$

$$L_2[P,\Gamma] = \int_E^{E_0} P(E',t)W_e(E',E)dE' -$$

$$-\int_0^E \Gamma(E,t)W_p(E,E')dE' \qquad (2)$$

Рассмотрим случай простейшего граничного условия, соответствующий одному первичному электрону, падающему вертикально на границу слоя вещества при $t = 0$.

Разложим функции *P(E', t)* и *Г(E', t)* по функциям Бесселя нулевого порядка, используя соотношения (преобразования Ханкеля)

$$P(E_0,E,t,\theta) = \int_0^\infty D_p(E_0,E,t,k)J_0(k\theta)kdk$$

где

$$D_p(E_0,E,t,\theta) = \int_0^\infty P(E_0,E,t,k)J_0(k\theta)\theta d\theta .$$

Здесь $J_0(k\theta)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

Аналогичные соотношения запишем для функций Γ и D_Γ. Умножим уравнения (1) на $J_0(k\theta)\theta$ и проинтегрировав по θ от 0 до ∞ получим

$$\frac{\partial D_p(E_0,E,t,k)}{\partial t} = L_1\left[D_p(E_0,E,t,k), D_\Gamma(E_0,E,t,k)\right] -$$

$$-\frac{E_k^2 k^2}{4E^2} D_p(E_0,E,t,k),$$

$$\frac{\partial D_\Gamma(E_0,E,t,k)}{\partial t} = L_2\left[D_p(E_0,E,t,k), D_\Gamma(E_0,E,t,k)\right]. \qquad (3)$$

Перейдем к трансформантам Лапласа по t. Умножим (3) на $e^{-\lambda t}$ и, проинтегрировав от t от 0 до ∞, получим

$$\frac{-\delta(E_0-E)}{2\pi} + \lambda D_p(E_0,E,\lambda,k) = L_1[D_p, D_\Gamma] -$$

$$-\frac{E_k^2 k^2}{4E^2} D_p(E_0,E,\lambda,k),$$

$$\lambda D_\Gamma(E_0,E,\lambda,k) = L_2[D_p, D_\Gamma]$$

Исключив D_Γ из второго уравнения по формуле

$$D_\Gamma(E_0,E,\lambda,k)=\frac{1}{\lambda+\sigma_0}\int_E^{E_0}D_p(E_p,E',\lambda,k)W_e(E',E)dE'$$

получим уравнение для D_p

$$\frac{\delta(E_0-E)}{2\pi}-\frac{E_k^2k^2}{4E^2}D_p(E_0,E,\lambda,k)=L[D_p(E_0,E,\lambda,k)] \qquad (5)$$

Здесь L - интегральный оператор, описывающий процессы радиационного торможения электронов и образования пар фотонами.

$$L[D_p(E_0,E,\lambda,k)]=-\int_E^{E_0}D_p(E_p,E',\lambda,k)K(E',E,\lambda)dE'-$$

$$-\int_E^{E_0}D_p(E_p,E',\lambda,k)W_e(E',E-E)dE'+$$

$$+D_p(E_p,E,\lambda,k)\int_0^{E}W_e(E',E)dE'+\lambda D_p(E_p,E',\lambda,k),$$

где

$$K(E',E,\lambda)=2\int_E^{E_1}\frac{W_e(E',\varepsilon)W_p(\varepsilon,E)}{\lambda+\sigma_0}d\varepsilon \qquad (6)$$

Умножим (6) на E^s и проинтегрируем по dE от E_1 до E_0. (Здесь s – некоторый, пока неопределенный комплексный параметр.) Изменив в некоторых двойных интегралах порядок интегрирования и обозначения E на E' и E_1 на E, получим

$$\int_E^{E_0}E'^sL[D_p(E_0,E',\lambda,k)]dE'=\int_E^{E_0}D_p(E_0,E',\lambda,k)\times$$

$$\times\varphi(E',E,\lambda,s)dE' \text{, где}$$

$$\varphi(E',E,\lambda,s)=-K_1(E,E',\lambda,s)+$$

$$+K_2(E',s)-K_3(E,E',s)+\lambda E'^s$$

$$K_1(E,E',\lambda,s)=\int_E^{E'}dE''E''^sK(E'',E',\lambda),$$

$$K_2(E',s)=E'^s\int_0^{E'}W_e(E',E'')dE'',$$

$$K_3(E,E',s)=\int_E^{E_1}W_e(E',E'-E'')E''^sdE''. \qquad (7)$$

Получим явное выражение для функции $\varphi(E',E,\lambda,s)$, используя приближенные выражения для W_e и W_p

$$W_e(E,E')dE'=\frac{dE'}{E'}$$

$$W_p(E',E)dE=\sigma_0\frac{dE}{E'}\text{, где }\sigma_0=0{,}073$$

После вычисления интегралов

$$\varphi(E',E,\lambda,s) = -E^s\{\psi(\lambda,s)x^{-s} + f(x,\lambda,s)\},\ \text{где}$$

$$\psi(\lambda,s) = \frac{[\lambda-\lambda_1(s)][\lambda-\lambda_2(s)]}{\lambda+\sigma_0} \tag{8}$$

$\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$, $B(s)$, $C(s)$ - функции каскадной теории

$$f(x,\lambda,s) = \frac{B(s)C(s)}{\lambda+\sigma_0}(xs-s-1)-$$

$$-\frac{x}{s+1}{}_2F_1(1,s+1;s+2;x),\ x=\frac{E}{E'},$$

${}_2F_1(1,s+1;s+2;x)$ - гипергеометрическая функция. Функция $f(x,\lambda,s)$ медленно меняется с изменением x в интервале $0 \le x \le 0{,}9$. Чтобы функция $\varphi(E',E,\lambda,s)E^s$ также слабо менялась с изменением s, необходимо положить $\lambda=\lambda_1(s)$ или $\lambda=\lambda_2(s)$.

Теперь соотношение (7) можно переписать:

$$\int_E^{E_0} E'^s L[D_p(E_0,E',s,k)]dE' =$$

$$= E^s q(E,s,k)D_N(E_0,E,s,k),$$

$$D_N(E_0,E,s,k) = \int_E^{E_0} D_p(E_0,E',s,k)dE',$$

$$q(E,s,k) =$$

$$= \frac{1}{D_N(E_0,E',s,k)}\int_E^{E_0}\frac{\partial D_N(E_0,E',s,k)}{\partial E'} f\left(\frac{E}{E'},s\right)dE'. \tag{9}$$

В соотношении (9) s и λ связаны соотношением $\lambda=\lambda_1(s)$. В первом приближении предполагают $q(E_0,s,k)=q(s)$. Тогда, продифференцировав (9) по E и разделив полученное равенство на E^s, получим приближенное выражение оператора L, описывающего процессы радиационного торможения и образования пар

$$L[D_p(E_0,E,\lambda,k)] = q(s)\frac{\partial D_N(E_0,E,\lambda,k)}{\partial E} +$$

$$+\frac{sq(s)}{E}D_N(E_0,E,\lambda,k). \tag{10}$$

В этом случае уравнение для D_N записывается в виде

$$\left[q(s)+\frac{E_k^2k^2}{4E^2}\right]\frac{\partial D_N}{\partial E}+\frac{sq(s)}{E}D_N(E_0,E,s,k)=\frac{\delta(E_0-E)}{2\pi} \tag{11}$$

Здесь *q(s)* выражается через известные функции каскадной теории

$$q(s) = -\frac{s\lambda_1'(s)}{H_1(s)}$$

Решение уравнения (7) имеет вид

$$D_N(E_0, E, s, k) = \frac{E_0^2}{2\pi q}(E_0^2 + E_k^2 k^2 / 4q)^{-1+s/2} \times$$
$$\times (E^2 + E_k^2 k^2 / 4q)^{-s/2} \text{ при } E < E_0 \qquad (12)$$

при $E \geq E_0$ оно равно нулю.

Упражнение 1. Используя трансформанты Ханкеля $D_N(E_0, E, s, k)$ получить функции $N_p(E_0, E, s, \theta)$, когда $E_0 >> E$.

Упражнение 2. Получить трансформанту Ханкеля $D_N(E_0, E, s, k)$ для произвольных граничных условий и произвольного вида функций источника:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = L[P, \Gamma] + \frac{E_k^2}{4E^2}\Delta_\theta P + s_p(E, t),$$
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = L_2[P, \Gamma] + s_\Gamma(E, t),$$
$$P(E_0, E, \theta, t = 0) = \varphi_p(E_0, E, \theta),$$
$$\Gamma(E_0, E, \theta, t = 0) = \varphi_\Gamma(E_0, E, 0).$$

Упражнение 3. Получить $D_N(E_0, E, s, \theta)$ для случая граничных условий $\Gamma(E_0, E, \theta, 0) = 0$, $P(E_0, E, \theta, 0) = \delta(E_0 - E)\delta(\theta_{x0} - \theta_x)\delta(\theta_{y0} - \theta_y)$, соответствующих одному первичному электрону, падающему на границу под углом $\theta_0 = \sqrt{\theta_{x0}^2 + \theta_{y0}^2}$.

Указание: Использовать преобразование Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-i\infty}^{+i\infty} d\theta_x d\theta_y e^{i(\theta_x k_x + \theta_y k_y)} f(\theta_x, \theta_y) =$$
$$= \Phi(k_x, k_y)$$
$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-i\infty}^{+i\infty} dk_x dk_y e^{i(\theta_x k_x + \theta_y k_y)} \Phi(k_x, k_y) =$$
$$= f(\theta_x, \theta_y)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленький С.З. Лавинные процессы в космических лучах. М., ГТТИ, 1948.
2. Иваненко И.П. Электромагнитные каскадные процессы. М., Изд-во Моск. ун-та, 1972.